ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

I . Première partie

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et à valeurs réelles.

1. (a) Justifier que f est bornée.

   (b) Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\, dt$ est convergente.

2. On désigne par F une primitive de f. Montrer que F est 2π-périodique si et seulement si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.

3. On pose $c_0(f) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt$. Soit β un réel strictement positif.

   (a) Montrer que toute primitive de la fonction $t \longmapsto f(t) - c_0(f)$ est 2π-périodique.

   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t) - c_0(f)}{t^\beta}\, dt$ est convergente.

   (c) Si $c_0(f) \neq 0$ et $\beta \leqslant 1$, donner un équivalent en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^\beta}\, dt$.

4. En déduire un équivalent, en $+\infty$, de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$.

II . Deuxième partie

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f possède une intégrale absolument convergente sur $\mathbb{R}$.

   (a) Démontrer que, pour tout réel y, la fonction $x \longmapsto f(x)\, e^{-ixy}$ possède une intégrable absolument convergente sur $\mathbb{R}$.

   On définit alors une nouvelle fonction, notée $\widehat{f}$, en posant : $\widehat{f}(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx,\ y \in \mathbb{R}.$

   (b) Démontrer que la fonction $\widehat{f}$ est bornée et continue.

2. (a) Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Calculer $\widehat{f}$ lorsque f est la fonction indicatrice, $\chi_{[\alpha,\beta]}$, de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$; on rappelle que

$$f(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in [\alpha, \beta] \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

(b) En déduire que, si a est un nombre réel > 0, et si ψ_a désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_a}(y) &= \frac{2\sin ay}{y} \qquad \text{pour} \quad y \in \mathbb{R},\ y \neq 0, \\ \widehat{\psi_a}(0) &= 2\,a. \end{aligned}$$

3. Soit a un nombre réel > 0, et soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, nulles hors de l'intervalle $[-a, a]$ et continues sur cet intervalle. On définit une nouvelle fonction, notée $f * g$, en posant, pour tout réel x,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

   (a) Vérifier que l'intégrale définissant $f * g$ a un sens, et que la fonction $f * g$ est nulle hors de l'intervalle $[-2\,a, 2\,a]$.

   (b) Démontrer que la fonction $f * g$ est continue.

4. Démontrer l'égalité

$$\psi_a * \psi_a = 2\,a\,\Delta_{2\,a}$$

où ψ_a désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ et $\Delta_{2\,a}$ la fonction définie par

$$\Delta_{2\,a}(x) = 1 - \frac{|x|}{2\,a} \quad \text{si} \quad -2\,a \leqslant x \leqslant 2\,a, \qquad \Delta_{2\,a}(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 2\,a.$$

5. Soient f et g deux fonctions vérifiant les hypothèses de la question 3. Démontrer l'égalité

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

III . Troisième partie

Dans la suite du problème, on utilisera le résultat suivant que l'on admettra :

Théorème de réciprocité de Fourier. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle hors d'un segment et à valeurs réelles. On suppose de plus que la fonction $\widehat{f}$ possède une intégrale absolument convergente sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy.$$

1. Soit b un nombre réel > 1. On pose $f_b(t) = \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|^b$ pour t réel non nul, et $f_b(0) = 1$.

   Démontrer que la fonction f_b possède une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$.

   Dans la suite, on note J_b la valeur de cet l'intégrale : $J_b = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)\, dt$.

2. (a) En utilisant les questions (2.b.), (4.) et (5.) de la partie précédente, démontrer que l'on a

$$\widehat{\Delta_1}(y) = f_2\left(\frac{y}{2}\right).$$

   (b) En utilisant le théorème de réciprocité de Fourier, calculer la valeur de l'intégrale J_2.

3. (a) En utilisant la définition donnée dans (II.3) de la loi $*$, calculer la valeur de $(\Delta_1 * \Delta_1)(0)$.

(b) En déduire la valeur de J_4.

IV . QUATRÈME PARTIE

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x_k$.
   (a) Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x_n$ est convergente et donner un encadrement de sa somme, S, à l'aide des termes des suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $(S - S_n)$ est $(-1)^{n+1}$.
2. En utilisant un développement en série entière, démontrer que l'on a
$$\frac{\sin t}{t} \leqslant 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} \qquad \text{pour} \quad 0 < t^2 \leqslant 72.$$
3. Démontrer de même que l'on a
$$e^{-t^2/6} \geqslant 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{72} - \frac{t^6}{1296} \qquad \text{pour} \quad t^2 \leqslant 30.$$
4. En déduire que l'on a
$$0 \leqslant \frac{\sin t}{t} \leqslant e^{-t^2/6} \qquad \text{pour} \quad 0 < t^2 \leqslant \frac{36}{5}.$$
5. Dans cette question, on suppose $b \geqslant 4$. On pose $c = \frac{6}{\sqrt{5}}$. On rappelle la valeur de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$
   (a) Démontrer que l'on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt^2/6}\,dt + 2\int_{c}^{+\infty}\frac{dt}{t^b}.$$
   (b) Calculer, en fonction de b, la valeur des intégrales
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt^2/6}\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{+\infty}\frac{dt}{t^b}\,.$$
   (c) Démontrer que l'on a $x - 1 \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 4$.
   (d) Déduire de ce qui précède la majoration
$$J_b \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}} + \frac{4}{3\pi c^3}\right)$$
   puis la majoration
$$J_b < \pi\sqrt{\frac{2}{b}}\,.$$

FIN DE L'ÉPREUVE